TAKING TILTING MODULES FROM THE POSET OF SUPPORT TILTING MODULES (Representation theory and related combinatorics)

数理解析研究所講究録
第 1998 巻 2016 年 1-6

TAKING TILTING MODULES FROM THE POSET OF SUPPORT TILTING MODULES

加瀬遼一 (奈良女子大学理学部)
RYOICHI KASE (FACULTY OF SCIENCE, NARA WOMEN'S UNIVERSITY)

1. Introduction

有限次元多元環における傾理論とは傾加群と呼ばれる加群に関する理論である. 傾加群は道多元環上の鏡映関手を与える加群の一般化として Brenner-Butler の共著論文 [BB] で導入された加群である. 彼らは傾加群の自己準同型環の加群圏と元の多元環の加群圏の間にある関係を見つけだし. Happel によってこの関係は加群圏の導来圏の同値に拡張され [H]、現在では与えられた有限次元多元環に対して、その傾加群の分類は重要な問題の一つとして位置づけられている. この分類問題に対する一つのアプローチが Riedtmann-Schofield によって導入された傾変異理論である [RS]. 傾変異とは与えられた傾加群から直既約因子を一つ取り替えて新しい傾加群を作る操作であり, 現在では様々なアプローチによってこの傾変異の理論の研究がなされている. 他方, Happel-Unger は basic な傾加群全体の上にある半順序を定め, その Hasse-quiver をとることにより傾変異の情報が完全に復元されることを示した [HU1, HU2].

傾変異を考える上で問題となるのが任意の直既約因子に関して常に傾変異が出来るとは限らないことである. 足立-伊山-Reiten は台 τ-傾加群なる傾加群を含む加群のクラスを導入しその上の変異理論を展開することで上記問題を補間した [AIR]. また道多元環の場合には台 τ-傾加群は Ingallus- Thomas が [IT] で導入した台傾加群と一致する. そこで台傾加群のなす半順序集合の中から傾加群を取り出せるかどうかは自然な疑問であるがこの疑問に対する答えが本稿の主結果である.

Theorem 1.1. Λ を有限次元道多元環とする. このとき Λ 上の *basic* な傾加群は台傾加群のなす半順序構造のみを用いて特徴づけられる.

2. 道多元環と Quiver の表現

以下 k を代数閉体とする. Quiver とは以下のような頂点と有向辺からなるグラフのことである. Quiver Q に対して Q_0, Q_1 でそれぞれ頂点集合と有向辺集合を表すことにする. また有向辺 $\alpha : a \to b$ に対して, $s(\alpha) := a$, $t(\alpha) := b$ と定める.

Definition 2.1. 有向辺の列 $w = (\alpha_1|\alpha_2|\cdots|\alpha_l)$ が Q 上の path (道) であるとは $t(\alpha_i) = s(\alpha_{i+1})$ が任意の i で成り立つときをいう. このとき l を path w の長さとよび $s(w) := s(\alpha_1)$ $t(w) := \alpha_l$ と定める. また頂点 $a \in Q_0$ に対して e_a を $s(e_a) = a = t(e_a)$ なる長さ 0 の path と定める.

このとき quiver Q に付随して k 上の道多元環 $\Lambda = kQ$ が以下のようにして定義される:
(1) k-ベクトル空間としての基底は Q 上の path 全体.
(2) path $w = (\alpha_1|\alpha_2|\cdots|\alpha_l)$, $w' = (\beta_1|\beta_2|\cdots|\beta_{l'})$ に対して積を

$$w \cdot w' = \begin{cases} (\alpha_1|\alpha_2|\cdots|\alpha_l \mid \beta_1|\beta_2|\cdots|\beta_{l'}) & \text{if } t(w) = s(w') \\ 0 & \text{if } t(w) \neq s(w') \end{cases}$$

と定める. 但し $s(w)=a,\ t(w)=b$ なる path w に対して $e_a w = w = w e_b$ とする.

Example 2.2. 道多元環の例を挙げる.

(1) $Q = 1 \to 2 \to 3$ とする. このとき $\Lambda = kQ$ は k 上の上三角行列環と同型である.
(2) このとき $\Lambda = kQ$ は k 上の 1 変数多項式環と同型である.

以下 Λ を道多元環 kQ とし Q は有限かつ *cycle* を持たない ($\Leftrightarrow \dim \Lambda < \infty$) とする. いま有限次元右 Λ-加群のなす圏 $\mathrm{mod}\,\Lambda$ は次で定める Q の表現の圏 $\mathrm{rep}\,Q$ と圏同値となっている.

Definition 2.3. Q の表現の圏 $\mathrm{rep}\,Q$ を以下で定める.

(対象) 対象は Q の頂点でラベル付けされた有限次元ベクトル空間の族 $V = (V_a)_{a\in Q_0}$ と Q の辺でラベル付けされた k-線型写像の族 $f = (f_\alpha : V_{s(\alpha)} \to V_{t(\alpha)})_{\alpha \in Q_1}$ の組 (V,f).
(射) $(V,f), (W,g)$ を対象とする. このとき (V,f) から (W,g) への射を Q の頂点でラベル付けされた k-線型写像の族 $\varphi = (\varphi_a : V_a \to W_a)_{a\in Q_0}$ であって, 各辺 $\alpha : a \to b$ に対して $\varphi_b f_\alpha = \varphi_a f_\alpha$ を満たすもの.

Remark 2.4. $M \in \mathrm{mod}\,\Lambda$ に対してベクトル空間としての分解

$$M = \bigoplus_{a\in Q_0} M e_a$$

を考える. Q の有向辺 $\alpha : a \to b$ の M への作用は線型写像 $u_\alpha : Me_a \to Me_b$ を誘導するが, このとき定まる Q の表現 $((M\cdot e_a)_{a\in Q_0}, (u_\alpha)_{\alpha\in Q_1})$ が M に対応する Q の表現である.

Example 2.5. $Q = 1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3$ とする. このとき Q の表現は以下のように図示される.

$$V_1 \xrightarrow{f_\alpha} V_2 \xrightarrow{f_\beta} V_3.$$

以下では Λ-加群と Q の表現を区別しない, また Λ-加群 $M = (V,f)$ に対して

$$\underline{\dim}\, M = ((\underline{\dim}\, M)_a)_{a\in Q_0} := (\dim V_a)_{a\in Q_0}$$

と定めこれを M の次元ベクトルとよぶ.

Proposition 2.6. $a \in Q_0$ に対して加群 $S(a),\ P(a),\ I(a)$ をそれぞれ以下のように定める.

(1) $\underline{\dim}\, S(a) = (\delta_{a,x})_{x\in Q_0}$.
(2) $P(a) = e_a\Lambda$.
(3) $I(a) = \mathrm{D}(\Lambda e_a)$.

ここで δ はクロネッカー δ であり, D は k-双対 $\mathrm{Hom}_k(-,k)$ である. このとき, 以下の集合 $\{S(a) \mid a\in Q_0\},\ \{P(a) \mid a \in Q_0\},\ \{I(a) \mid a \in Q_0\}$ はそれぞれ直既約な既約加群, 射影加群, 入射加群の同型類の完全代表系を与える.

Example 2.7. $Q = 1 \to 2$ とする. このとき

$$P(1) = I(2) = k \xrightarrow{1} k,\ P(2) = S(2) = 0 \to k,\ I(1) = S(1) = k \to 0.$$

3. 傾加群, 台傾加群

この節では傾加群, 台傾加群およびそれらがなす半順序集合を導入する. $M \in \mathrm{mod}\,\Lambda$ の直既約分解

$$M \simeq \oplus_{i=1}^m M_i^{r_i}\ (i \neq j \Rightarrow M_i \not\simeq M_j)$$

に対して $|M| := m$ と置き, $r_i = 1\ (\forall i)$ のとき M を basic と呼ぶ.

Definition 3.1. $T \in \operatorname{mod}\Lambda$ が傾加群であるとは以下の性質が成り立つときにいう.

- $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(T,T) = 0$.
- $|T| = \#Q_0$.

また $\operatorname{tilt}\Lambda$ で basic な Λ 上の傾加群 (の同型類) 全体を表すことにする.

このとき $\operatorname{tilt}\Lambda$ 上の半順序が以下のようにして定まる.

Definition-Theorem 3.2. [HU1, HU2] $T \geq T' \Leftrightarrow \operatorname{Ext}^1_\Lambda(T,T') = 0$.

いま $M \in \operatorname{mod}\Lambda$ に対して $\operatorname{supp}(\mathrm{M}) := \{\mathrm{a} \in \mathrm{Q}_0 \mid (\underline{\dim}\,\mathrm{M})_\mathrm{a} > 0\}$ とおき, $Q(M)$ で $\operatorname{supp}(\mathrm{M})$ を頂点集合にもつ Q の full subquiver とする. また $\Lambda(M) := kQ(M)$ とおく. このとき M は $\Lambda(M)$-加群とみなせることに注意しておく.

Definition 3.3. $T \in \operatorname{mod}\Lambda$ が台傾加群であるとは以下の条件を満たすときにいう.

(1) $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(T,T) = 0$.
(2) $|T| = \#\operatorname{supp}(\mathrm{T})$.

また $\operatorname{s-tilt}\Lambda$ で basic な Λ 上の台傾加群 (の同型類) 全体を表すことにする.

つまり T が $\Lambda(T)$ 上で傾加群になるとき T は台傾加群とよばれるのである. 傾加群のときと同様に以下のようにして $\operatorname{s-tilt}\Lambda$ 上に半順序が定まる.

Definition-Theorem 3.4. [AIR, IT] $T \geq T' \Leftrightarrow \operatorname{Ext}^1_\Lambda(T,T') = 0$ & $\operatorname{supp}(\mathrm{T'}) \subset \operatorname{supp}(\mathrm{T})$.

Example 3.5. $Q = 1 \to 2$ とする. このとき $\operatorname{s-tilt}\Lambda$ の半順序構造は以下で与えられる.

$$\begin{tikzcd}
& P(1)\oplus P(2) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
P(1)\oplus I(1) \arrow[d] & & P(2) \arrow[d] \\
I(1) \arrow[rr] & & 0
\end{tikzcd}$$

4. 証明の方針

まず定義より次が従うことに注意する.

$$T \in \operatorname{s-tilt}\Lambda \text{ が傾加群} \Leftrightarrow T \geq I_\Lambda = \oplus_{a\in Q_0} I(a).$$

したがって定理を示すには $\operatorname{s-tilt}\Lambda$ の半順序構造から I_Λ を決定できることをいえばよい. そのための準備として各非負整数 i に対して, 頂点集合 Q_0 の部分集合 V_i を以下で定める.

- $V_0 = \emptyset$.
- $V_i = V_{i-1} \cup \{a \in Q_0 \mid a \text{ は } Q \setminus V_{i-1} \text{ の source}\}$.

また $I_i := \oplus_{a\in V_i} I(a)$ $(I_0 = 0)$ と置く. このとき $I_i \in \operatorname{s-tilt}\Lambda$ であることに注意する. 証明の方針は $I_0 = 0$ から帰納的に I_i たちを決定していくことである. 帰納法を実現する鍵となるのは次の事実である.

Lemma 4.1. $i \geq 0$ とする. このとき I_{i+1} は次の集合の最小元である.

$$\bigcap_{X\in \operatorname{idp}(\mathrm{I_i})} \{T \in \operatorname{s-tilt}\Lambda \mid T \geq X\},$$

ここで $\operatorname{idp}(\mathrm{I_i})$ は I_i の 入射的な *direct predecessor* 全体のなす集合である.

従って I_i から I_{i+1} が決定出来る事を示すには $\mathrm{idp}(\mathrm{I_i})$ が s-tilt Λ の半順序構造から決定出来ることをいえばよい. ここで 入射的でない I_i の direct predecessor T には次の 2 つの type がある.

(type 1) $\#\mathrm{supp}(\mathrm{T}) = \#\mathrm{supp}(\mathrm{I_i}) + 1$.
(type 2) $\#\mathrm{supp}(\mathrm{T}) = \#\mathrm{supp}(\mathrm{I_i})$.

ここで $\mathcal{N}_i(1)$, $\mathcal{N}_i(2)$ でそれぞれ type 1, type 2 に属する I_i の direct predecessor 全体を表すことにする. まずは $\mathrm{idp}(0)$ を決定できることが次の Lemma からわかる.

Lemma 4.2. a, $b \in Q_0$ とする. このとき a から b に有向辺があることと $X \in \mathrm{dp}(\mathrm{S(a)})$, $Y \in \mathrm{dp}(\mathrm{S(b)})$ が存在して $X < Y$ が成り立つことは同値である.

ここで $S(a)$ が入射的であることと $a \in Q_0$ が source であることは同値なので主張 ($\mathrm{idp}(0)$ が決定出来る事) が従う. 以下 $i > 0$ とする.

Lemma 4.3. $T \in \mathcal{N}_i(1)$ とする. このときある $T' \in \mathrm{dp}(\mathrm{I_i})$, $X \in \mathrm{dp}(\mathrm{T})$, $Y \in \mathrm{dp}(\mathrm{T'})$ が存在して $X > Y$ が成り立つ.

Lemma 4.4. $T \in \mathrm{idp}(\mathrm{I_i})$ とする. このとき任意の $T' \in \mathrm{dp}(\mathrm{I_i})$, $X \in \mathrm{dp}(\mathrm{T})$, $Y \in \mathrm{dp}(\mathrm{T'})$ に対して $X \not> Y$ である.

今 Lemma 4.3, Lemma 4.4 より $\mathrm{dp}(\mathrm{I_i})$ から $\mathcal{N}_i(1)$ が排除出来ること従う. 次に $\mathrm{dp}(\mathrm{I_i})$ から $\mathcal{N}_i(2)$ を排除するために以下の集合を導入する. $T \in \mathrm{dp}(\mathrm{I_i})$ 及び $r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対して

$$\mathcal{F}(i,T,r) := \{((X_k)_{k\in\{0,\cdots,r\}}, (T_k)_{k\in\{0,\cdots,r-1\}}, (Y_k)_{k\in\{1,\cdots,r-1\}}) \mid (\star)\}$$

ここで条件 $(\star)$ は以下の通りである: $$(\star) := \begin{cases} \bullet\ X_0 = I_i,\ T_0 = T \\ \bullet\ X_1 \in \mathrm{ds(I_i)},\ \mathrm{X_{k+1}} \in \mathrm{ds(X_k)} \\ \bullet\ T_k \in \mathrm{dp(X_k)} \setminus \{\mathrm{X_{k-1}}\} \\ \bullet\ Y_k \in \mathrm{dp(T_k)} \\ \bullet\ Y_1 \geq T,\ Y_{k+1} \geq T_k \end{cases}$$

Lemma 4.5. $T \in \mathcal{N}_i(2)$ とする. このときある $r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 及び $((X_k),(T_k),(Y_k)) \in \mathcal{F}(i,T,r)$ が存在して, 任意の $T_r \in \mathrm{dp(X_r)} \setminus \{\mathrm{X_{r-1}}\}$ 及び $Y_r \in \mathrm{dp(T_r)}$ に対して $Y_r \not\geq T_{r-1}$ となる.

他方, 次の Lemma が成り立つ.

Lemma 4.6. $T \in \mathrm{idp}(\mathrm{I_i})$ とする. このとき任意の $r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 及び $((X_k),(T_k),(Y_k)) \in \mathcal{F}(i,T,r)$ に対して, ある $T_r \in \mathrm{dp(X_r)} \setminus \{\mathrm{X_{r-1}}\}$ 及び $Y_r \in \mathrm{dp(T_r)}$ が存在して $Y_r \geq T_{r-1}$ となる.

以上より $\mathcal{N}_i(2)$ が排除出来ることがわかった. 特に次が従う.

Corollary 4.7. Λ, Γ を有限次元道多元環, ρ を半順序同型

$$\rho : \text{s-tilt}\,\Lambda \simeq \text{s-tilt}\,\Gamma$$

とする. このとき ρ の $\mathsf{tilt}\,\Lambda$ への制限 $\rho|_{\mathsf{tilt}\,\Lambda}$ は半順序同型

$$\rho|_{\mathsf{tilt}\,\Lambda} : \mathsf{tilt}\,\Lambda \simeq \mathsf{tilt}\,\Gamma$$

を誘導する.

Remark 4.8. s-tilt $\Lambda \simeq$ s-tilt $\Gamma \Rightarrow \Lambda \cong \Gamma$ は成り立たない. 実際 $Q(r)$ を以下で定まる quiver とする: $Q_0 = \{1,2\}$, $Q_1 = \{\alpha_i : 1 \to 2 \mid 1 \leq i \leq r\}$.

このとき,

$$\text{s-tilt}\,kQ(2) \simeq \text{s-tilt}\,kQ(3) \simeq \cdots.$$

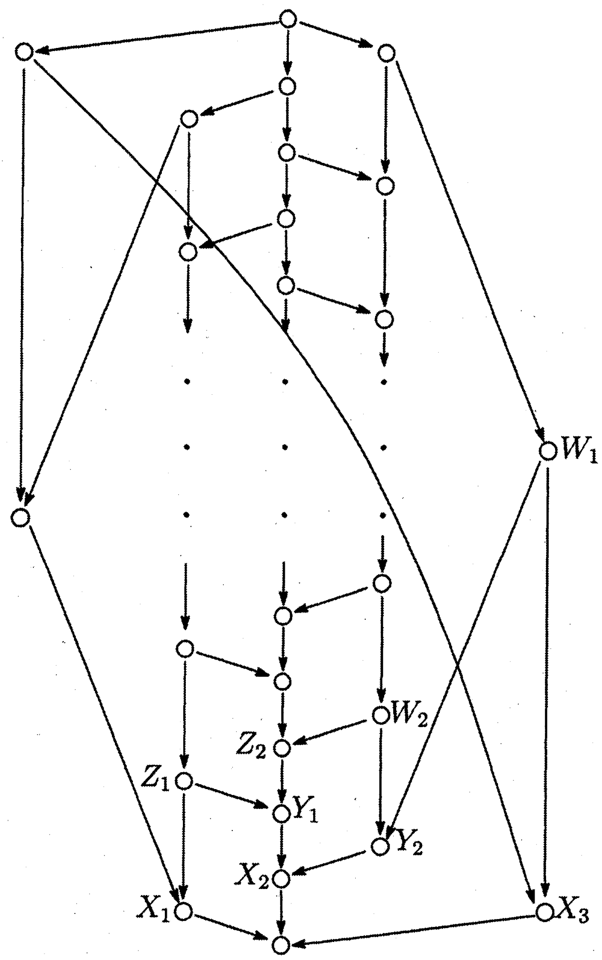
である.

5. Example

いま Q として次の quiver をとる.

$$\begin{tikzcd} & 2 \arrow[dr] & \\ 1 \arrow[ur] \arrow[rr] & & 3 \end{tikzcd}$$

このとき s-tilt Λ の半順序構造は以下で与えられる



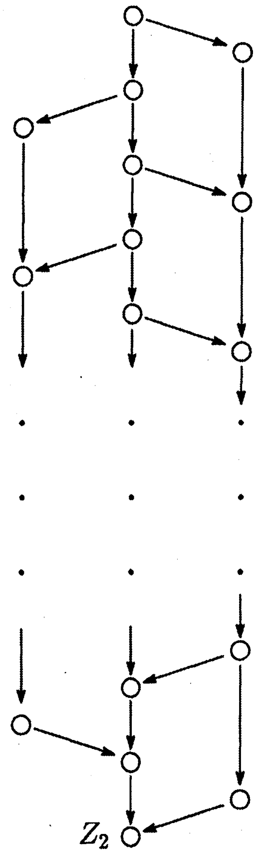
但し点線でつながっている部分は実際にはつながっていないが大小関係がある (上 > 下).

step 1 まず X_1, X_2, X_3 の中で入射的であるものを見つける. 0, X_1, X_2, Y_1, Z_1 に Lemma 4.2 を適用すれば X_1 が入射的でないことがわかる. 同様にして X_3 が入射的でないこともわかり残った X_2 が入射的な点である.

step 2 次に Y_1, Y_2 の中で入射的なものを見つける. X_2, Y_1, Y_2, Z_2, W_2 に Lamma 4.3 を適用すれば Y_2 が入射的でないことがわかる. したがって Y_1 は入射的である.

step 3 最後に Z_1, Z_2 のどちらが求める入射的傾加群かを決定する. $\mathcal{F}(1, Z_1, Y_1) \ni ((Y_1, X_2), (Z_1), \emptyset)$ を考える. いま X_2 の direct predecessor は Y_2 のみであり, Y_2 の direct predecessor は W_1, W_2 であるがどちらも Z_1 のあいだに大小関係は存在しない. 特に Lemma 4.5 を用いれば Z_1 は入射的でないことがわかる. したがって, 求めたかった入射的傾加群は Z_2 である.

以上より tilt Λ の位置が決定できその半順序構造は以下の通りである.



REFERENCES

[AIR] T. ADACHI, O. IYAMA, I. REITEN, τ-tilting theory. *Compos. Math.* **150**, no. 3, 415–452 (2014).

[BB] S. BRENNER; M.C.R. BUTLER, Generalizations of the Bernstein-Gelfand-Ponomarev reflection functors. Representation theory, II (Proc. Second Internat. Conf., Carleton Univ., Ottawa, Ont., 1979), pp.103-169, Lecture Notes in Math., **832**, Springer, Berlin-New York (1980).

[H] D. HAPPEL, Triangulated categories in the representation theory of finite-dimensional algebras. London Mathematical Society Lecture Note Series, **119**. Cambridge University Press, Cambridge (1988).

[HU1] D. HAPPEL; L. UNGER, On a partial order of tilting modules. *Algebr. Represent. Theory* **8**, no. 2, 147–156 (2005).

[HU2] D. HAPPEL; L. UNGER, On the quiver of tilting modules. *J. Algebra* **284**, no. 2, 857–868 (2005).

[IT] C. INGALLS; H. THOMAS, Noncrossing partitions and representations of quivers. *Compos. Math.* **145**, no. 6, 1533-1562 (2009).

[RS] C. RIEDTMANN; A. SCHOFIELD, On a simplicial complex associated with tilting modules. *Comment. Math. Helv.* **66**, no. 1, 70–78 (1991).